Joyaux des Maths

Un échantillon des merveilles mathématiques.

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times\ 9 \\ \hline 111111111 \\ \times\ 111111111 \\ \hline 12345678987654321 \end{array}$$

$$\frac{1}{9} = .111111\ldots$$

Calcul amusant avec le chiffre neuf.

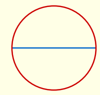
$$\begin{aligned} 142857 \times 2 &= 285714 \\ 142857 \times 3 &= 428571 \\ 142857 \times 4 &= 571428 \\ 142857 \times 5 &= 714285 \\ 142857 \times 6 &= 857142 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{7} = .142857\ldots$$

Calcul amusant avec le chiffre sept.

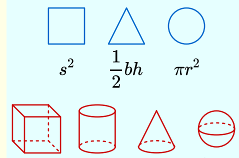
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Un carré magique. Toutes les lignes, colonnes et diagonales ont la même somme.



$$\pi = 3.14159\ldots$$

Le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre est pi. Pi est transcendant, c'est-à-dire, irrationnel et non-algébrique.



s^2 $\quad \frac{1}{2}bh$ $\quad \pi r^2$

s^3 $\quad \pi r^2 h$ $\quad \frac{\pi}{3} r^2 h$ $\quad \frac{4}{3}\pi r^3$

Formules d'aires et de volumes. Archimède a trouvé la sphère.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \cdots$$

Pi, exprimé comme une série infinie et un produit infini.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La somme des nombres de 1 à n.

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = n!$$

Le produit des nombres de 1 à n est appelé n factorielle.

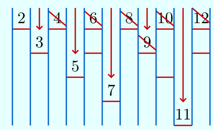
$$n! \approx \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Approximation de Stirling de n factorielle. La fonction gamma d'Euler donne les factorielles des entiers mais a aussi des valeurs pour les fractions.

$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$



Un nombre premier est divisible seulement par 1 et lui-même. Le crible d'Ératosthène permet de les trouver.

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$$

Le théorème des nombres premiers de Gauss et Legendre estime la quantité de nombres premiers inférieurs à x.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

La fonction zêta d'Euler et Riemann, exprimée comme une série infinie et un étrange produit sur tous les nombres premiers.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Le théorème binomial développe les puissances de sommes. Le coefficient binomial est le nombre de façons de choisir k objets dans un ensemble de n objets, sans tenir compte de l'ordre.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ \ldots \end{array}$$

Le triangle de Pascal montre les coefficients binomiaux.

Si $\sqrt{2}$ est rationnel

$\rightarrow \sqrt{2} = \frac{n}{m}$, fraction réduite

$\rightarrow \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2 \ \rightarrow n^2 = 2m^2$

$\rightarrow n^2$ est pair $\rightarrow n$ est pair

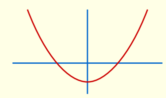
$\rightarrow n^2$ est divisible par 4

$\rightarrow m^2$ est pair $\rightarrow m$ est pair

$\rightarrow \frac{n}{m}$ n'est pas réduite

$\rightarrow \sqrt{2}$ n'est pas rationnel

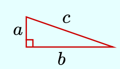
Preuve que la racine de deux est un nombre irrationnel.



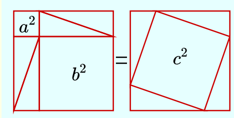
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

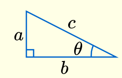
L'équation quadratique définit une parabole.



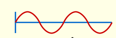
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Le théorème de Pythagore. Une preuve géométrique.



$$\sin\theta = \frac{a}{c} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}$$



$y = \sin x$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

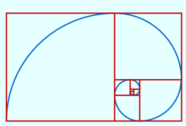
Les fonctions trigonométriques. Une autre forme du théorème de Pythagore.

$$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

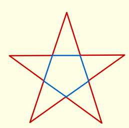
$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

$$\phi = 1.618\ldots \quad \frac{1}{\phi} = 0.618\ldots$$

Le nombre d'or, phi. Le rapport du tout sur la grande partie est égale au rapport de la grande partie sur la petite partie. phi est irrationnel et algébrique.



Le rectangle d'or, un idéal esthétique classique. Enlever le carré de départ laisse un autre rectangle d'or. Une spirale logarithmique y est inscrite.



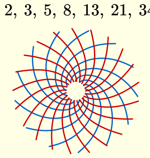
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Le pentagramme contient beaucoup de segments ayant comme rapport le nombre d'or.

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

Le nombre d'or, exprimé comme une fraction infinie.

$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$

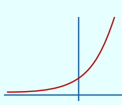


Chaque nombre de Fibonacci est la somme des deux précédents. Le nombre de spirales dans un tournesol ou une pomme de pin est un nombre de Fibonacci.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

$$F_n = \frac{\phi^n - \left(\frac{-1}{\phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

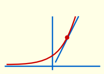
Le rapport de deux nombres de Fibonacci consécutifs approche le nombre d'or. Une formule exacte pour le n-ième nombre de Fibonacci.

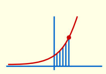


$$y = \mathrm{e}^x \qquad x = \log y$$

$$\mathrm{e} = 2.71828\ldots$$

La constante de Napier, e, est la base naturelle des logarithmes et exponentielles. e est transcendant.





$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \qquad \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$$

La calcul, développé par Newton et Leibniz, est basé sur les dérivées (pentes) et les intégrales (aires) des courbes. La dérivée de e^x est e^x. L'intégrale de e^x est e^x.

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

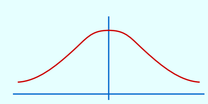
$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

e, exprimé comme une limite et une série infinie.

$$\mathrm{e}^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$$

$$\mathrm{e}^{\pi\sqrt{-1}} = -1$$

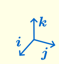
Formule d'Euler reliant l'exponentielle aux ondes sinusoïdales. Un cas spécial reliant les nombres pi, e, et la racine carrée imaginaire de −1.



$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La Gaussienne ou distribution normale de probabilité est une courbe en cloche.

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

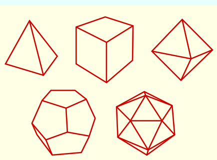


$$\nabla = \vec{\boldsymbol{\imath}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\boldsymbol{\jmath}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla U \quad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{V}} \quad \nabla \times \vec{\boldsymbol{V}}$$

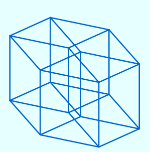
$$\nabla^2 U \quad \Box U$$

Produit vectoriel de Gibbs. Nabla agit sur des champs scalaires et vectoriels en 3D, le d'alembertien en 4D.



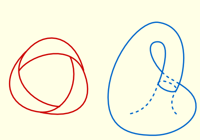
$$v - e + f = 2$$

Les 5 polyèdres réguliers. Formule d'Euler pour le nombre de sommets, arêtes et faces de tout polyèdre.

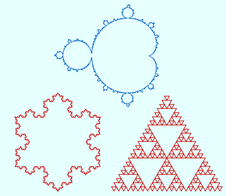


$$v - e + f - c = 0$$

L'hypercube. Formule de Schläfli pour les sommets, arêtes, faces, et cellule de tout polytope de dimension 4.



Le ruban de Möbius a seulement un côté. L'intérieur de la bouteille de Klein est son extérieur.



Les fractales de Mendelbrot, Koch, et Sierpinski ont un niveau de détails infini.

Imaginez lister tous les réels entre 0 et 1 dans un ordre quelconque.

$1 \rightarrow\ .8\,4\,9\,7\,3\,8\ldots$
$2 \rightarrow\ .1\,7\,9\,3\,8\,0\ldots$
$3 \rightarrow\ .1\,0\,3\,4\,2\,1\ldots$
$4 \rightarrow\ .3\,5\,6\,1\,2\,2\ldots$

On peut toujours fabriquer un réel non listé en changeant chaque chiffre sur la diagonale, par ex., changer .8731... en .9842...

Preuve de Cantor que l'infinité des nombre réel est plus grande que l'infinité des entiers.

$$(\exists y)(x) \sim \mathrm{Dem}(x, y)$$

$$\supset$$

$$(x) \sim \mathrm{Dem}(x, \mathrm{sub}(n, 13, n))$$

[de Nagel and Newman, *Gödel's Proof*]

Gödel a prouvé que si une théorie est cohérente, elle doit être incomplète, c.à.d. qu'il y a des énoncés vrais qui ne peuvent pas être prouvés.

Pour en apprendre plus, regardez sur internet ou à la bibliothèque.